

ЭФФЕКТ КЕРРА

Оптическая анизотропия вещества всегда связана с анизотропными свойствами молекул, из которых построено это вещество. Почти все молекулы обладают анизотропной поляризуемостью, хотя она проявляется далеко не во всех случаях. Кроме того, многие молекулы имеют собственный дипольный момент, величина которого и его ориентация зависят от химического строения молекулы. Тем не менее, оптически изотропное вещество может быть построено и из анизотропных молекул, если последние расположены беспорядочно, как это имеет место в газах, жидкостях или аморфных телах. Напротив, если молекулам вещества любым способом придать ориентацию, то вектор поляризации – суммарный дипольный момент молекул – уже не будет иметь одинаковые значения для разных направлений. Вещество приобретет анизотропию диэлектрической проницаемости, а следовательно, оптическую анизотропию.

Такую анизотропию, выражающуюся в появлении двойного лучепреломления, можно вызвать, например, подвергнув тело одностороннему сжатию и растяжению (фотоэластический эффект); у некоторых жидкостей – внесением их в электрическое поле (эффект Керра); созданием потока жидкостей тех веществ, молекулы которых имеют вытянутую форму.

Эффект Керра, или электрооптический эффект – это возникновение двулучепреломления у изотропного вещества, помещенного в однородное электрическое поле. В электрическом поле вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает по направлению с приложенным полем. Свет, распространяющийся перпендикулярно к направлению статического поля, будет иметь различную скорость, в зависимости от взаимного расположения электрического поля световой волны и внешнего поля. Перпендикулярное расположение этих полей соответствует обыкновенному лучу, параллельное – необыкновенному. Если в образец перпендикулярно внешнему полю войдет луч, поляризованный под углом к полю, то выйдет он поляризованным эллиптически. Эксперимент показывает, что для данного вещества разность хода между обыкновенной и необыкновенной составляющими луча пропорциональна квадрату напряженности внешнего поля:

$$\Delta = l(n_e - n_o) = \lambda BIE^2 \quad (1)$$

Здесь l – длина пути, пройденная лучом в веществе, B – постоянная Керра, характеризующая величину двойного лучепреломления. Постоянная Керра зависит от природы вещества, температуры (уменьшается с ее ростом) и длины волны (закон Хэвлана). Наибольшая величина постоянной Керра у веществ, молекулы которых обладают большим собственным дипольным моментом, однако, и недипольные вещества проявляют двулучепреломление в электрическом поле. Для недипольных молекул объяснение эффекта Керра было дано П.Ланжевенем, обобщение на случай дипольных молекул было предложено М.Борном. Идеи теории Ланжевена-Борна основаны на том, что молекулы обладают анизотропией оптической поляризуемости, т.е. поляризуются под действием поля световой волны в различных направлениях в различной мере, однако в отсутствие электрического поля их хаотическое расположение обуславливает макроскопическую изотропность жидкости или газа. Во внешнем электрическом поле молекулы будут стремиться устанавливаться так, чтобы ось наиболее легкой поляризуемости была направлена по полю. Этому противодействует тепловая броуновская переориентация молекул. Установившееся статическое равновесие и обуславливает появление двойного лучепреломления. Если молекулы имеют дипольный момент, то ориентация происходит и независимо от различия поляризуемости в различных направлениях. В общем случае, необходимо принимать в расчет оба эффекта. Теория Ланжевена-Борна хорошо описывает уменьшение эффекта Керра с ростом температуры, а также объясняет малое время релаксации двойного лучепреломления (порядка $10^{-9} - 10^{-10}$ с)

Количественную оценку величины двулучепреломления можно получить, исходя из соотношения Лорентц-Лоренца для изотропной среды:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha_0 \quad (2)$$

Здесь n – показатель преломления, N – число молекул в 1 см^3 , α_0 – средняя поляризуемость молекулы на частоте света.

Если молекулы, составляющие вещество, изотропны, то поляризуемость определяется как коэффициент пропорциональности между индуцированным электрическим моментом и напряженностью электромагнитной волны

$$\vec{\mu} = \alpha \vec{E} \quad (3)$$

В общем случае анизотропной молекулы поляризуемость обращается в тензор, определяемый как

$$\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

Или, пользуясь сокращенной записью, в которой производится суммирование по повторяющемуся индексу

$$\mu_i = \alpha_{ik} E_k \quad (5)$$

Как известно, повернув систему координат вместе с молекулой, можно добиться ее такого положения, что

$$\mu_i = \alpha_i E_i \quad (6)$$

Оси такой системы координат называются главными осями поляризуемости, а связанные с ними значения α_i – главными значениями поляризуемости.

Среднее значения поляризуемости α_0 , входящее в уравнение Лорентц-Лоренца, можно получить путем усреднения по всем ориентациям молекул в жидкости. Выберем координатную систему x'_1, x'_2, x'_3 , жестко связанную с молекулой и неподвижную систему x_1, x_2, x_3 , связанную с экспериментальной установкой (лабораторная система координат).

Взаимное расположение систем определяется матрицей преобразования

$$x'_i = c_{ik} x_k \quad (7)$$

Элементы матрицы преобразования представляют собой косинусы углов между соответствующими осями (направляющие косинусы).

Если составляющие электрического поля световой волны в точке, в которой находится молекула, в лабораторной системе координат равны E_i , то в молекулярной системе координат эти составляющие равны

$$E'_i = c_{ik} E_k \quad (8)$$

Под действием поля этой волны в молекуле возникает индуцированный дипольный момент с составляющими μ'_i , которые определяются тензором оптической поляризуемости молекулы

$$\mu'_j = \alpha_{jl} E'_l = \alpha_{jl} c_{lk} E_k \quad (9)$$

Возвращаясь обратно к лабораторной системе координат, составляющие момента $\vec{\mu}$ можно записать в следующем виде

$$\mu_i = c_{ij}^{-1} \mu'_j = c_{ij}^{-1} \alpha_{jl} E'_l = c_{ij}^{-1} \alpha_{jl} c_{lk} E_k \quad (10)$$

В частности, если световая волна распространяется так, что она поляризована вдоль направления x_3 лабораторной системы координат, то составляющие вектора E имеют вид $E_1=0, E_2=0, E_3=E$. Составляющая μ_3 равна

$$\begin{aligned}\mu_3 &= c_{31}\alpha_{11}c_{13}E_3 + c_{31}\alpha_{12}c_{23}E_3 + c_{31}\alpha_{13}c_{33}E_3 + c_{32}\alpha_{21}c_{13}E_3 + c_{32}\alpha_{22}c_{23}E_3 + \dots = \\ &= (\alpha_{11}c_{13}^2 + \alpha_{22}c_{23}^2 + \alpha_{33}c_{33}^2 + 2\alpha_{12}c_{13}c_{23} + 2\alpha_{23}c_{23}c_{33} + 2\alpha_{13}c_{33}c_{13})E_3\end{aligned}\quad (11)$$

В отсутствие постоянного электрического поля, когда все ориентации молекул равновероятны, усреднение по всем молекулам выражения в скобках дает среднюю величину поляризуемости, которая входит в уравнение Лорентц-Лоренца и определяет показатель преломления вещества. Поскольку среднее значение косинуса равно нулю, а среднее значение квадрата косинуса – 1/3 (элементы матрицы с суть косинусы углов), то Средняя поляризуемость на частоте световой волны

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3}\quad (12)$$

При наличии постоянного электрического поля, среднее значение поляризуемости изменится на величину $\Delta\alpha$ вследствие появления преимущественной ориентации молекул под действием внешнего поля. При этом величина $\Delta\alpha$ будет различна для поляризации света параллельно и перпендикулярно вектору электрического поля. Кроме того, вследствие электрострикции число молекул N в 1 см³ также изменится на ΔN .

Разницу показателей преломления вещества для различных поляризаций можно получить, дифференцируя закон Лорентц-Лоренца

$$\Delta n = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{6n} \left(\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \right)\quad (13)$$

Величина электрострикции, определяемая из термодинамических соображений, равна

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_T \frac{E^2}{2}\quad (14)$$

Где ε – диэлектрическая постоянная, p – давление, T – абсолютная температура.

Изменение поляризуемости $\Delta\alpha$ можно получить, усредняя, как и прежде, моменты по всем возможным ориентациям, учитывая при этом появление преимущественной ориентации. Согласно закону Больцмана, относительная вероятность того, что молекула

займет какое-то выделенное направление, пропорциональна множителю $\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$, где

U – энергия молекулы в электрическом поле. Среднее значение поляризуемости $\bar{\alpha}$ определяется тогда следующим образом

$$\bar{\alpha} = \frac{\mu_i}{E_k} = \frac{\int e^{-\frac{U}{kT}} c_{ij}^{-1} \alpha_{jl} c_{lk} d\Omega}{\int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega}\quad (15)$$

Интегрирование производится по всем пространственным ориентациям.

Энергия U молекулы в электрическом поле E , которое вызывает смещение зарядов и деформацию молекулы, равна

$$U = -(\bar{\mu}_0 \vec{E}) - \frac{1}{2} (\hat{\beta} \vec{E}, \vec{E})\quad (16)$$

Тензор β отвечает за поляризацию молекул на низких частотах. В приведенном выражении первый член – энергия постоянного диполя молекулы во внешнем поле, а второй – энергия наведенного диполя в наводящем поле.

В результате длинного элементарного вычисления, которое мы опустим, оказывается, что средняя величина поляризуемости в электрическом поле равна

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 + \Delta\alpha = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3} + \Delta\alpha\quad (17)$$

Разница $\Delta\alpha$ оптической поляризуемости зависит от направления электрического поля и от поляризации падающего света. В случае, когда рассматривается свет, распространяющийся перпендикулярно к направлению статического поля, изменение

поляризуемости для волны, поляризованной перпендикулярно полю (обыкновенный луч) и для волны, поляризованной по полю (необыкновенный луч), соответственно равны

$$\begin{cases} (\Delta\alpha)_e = 2(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 \frac{E^2}{2} \\ (\Delta\alpha)_o = -(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 \frac{E^2}{2} \end{cases} \quad (18)$$

Где

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{45kT} ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) + (\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3) + (\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_3)) \\ \theta_2 = \frac{1}{45k^2T^2} ((\mu_1^2 - \mu_2^2)(\beta_1 - \beta_2) + (\mu_2^2 - \mu_3^2)(\beta_2 - \beta_3) + (\mu_1^2 - \mu_3^2)(\beta_1 - \beta_3)) \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя приведенные выражения в дифференциал формулы Лорентц-Лоренца, получим

$$\begin{aligned} (\Delta n)_e = n_e - n &= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{12n} \left(\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_T + 2 \left(\frac{\varepsilon + 2}{3} \right)^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{\alpha_0} \right) E^2 \\ (\Delta n)_o = n_e - n &= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{12n} \left(\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\varepsilon + 2}{3} \right)^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{\alpha_0} \right) E^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда

$$n_e - n_o = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{4n} \left(\left(\frac{\varepsilon + 2}{3} \right)^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{\alpha_0} \right) E^2 \quad (21)$$

И постоянная Керра

$$B = \frac{n_e - n_o}{\lambda E^2} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{4n\lambda} \left(\left(\frac{\varepsilon + 2}{3} \right)^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{\alpha_0} \right) \quad (22)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В работе предлагается измерить постоянную Керра жидкости при различных значениях внешнего электрического поля E.

Блок-схема измерительной установки представлена на Рис.1.

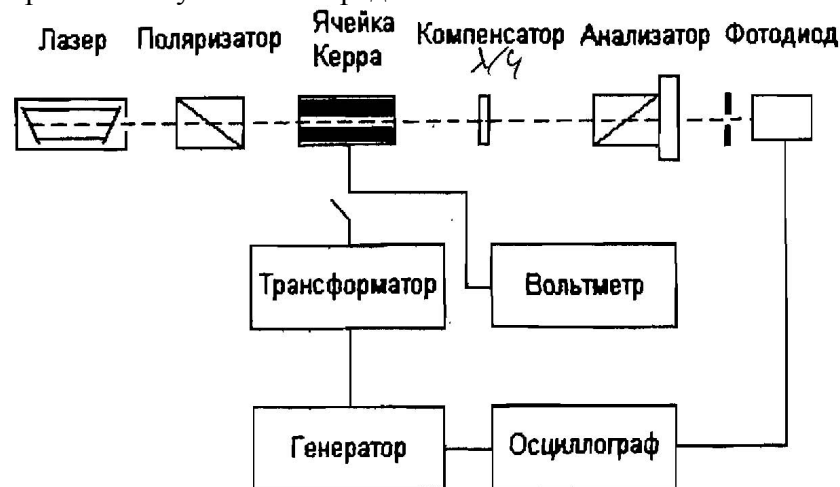


Рис.1

Установка состоит из источника света, в качестве которого используется полупроводниковый лазер с длиной волны 655 нм, поляризатора, кюветы с образцом, компенсатора, анализатора, фотоприемника, схемы питания образца и схемы измерения сигнала.

Свет, излучаемый источником, проходит через поляризатор, ячейку Керра, компенсатор (четвертьволновую пластинку), анализатор и освещает фотодиод. Сигнал фотодиода наблюдается на экране осциллографа.

Образец находится в ячейке Керра, представляющей собой стеклянную трубку с двумя полуцилиндрическими электродами, при этом электрическое поле может быть приложено горизонтально. К торцам трубки приклеены окна из кварцевого стекла. Длина электродов $l=1.3$ см, ширина зазора между ними $d=0,05$ см. В качестве компенсатора используется слюдяная пластинка, создающая оптическую разность хода, равную $\lambda/4$. Поляризатор установлен так, что его оптическая ось составляет с вектором напряженности электрического поля в межэлектродном пространстве угол, равный $\pi/4$. Оптическая ось компенсатора параллельна оси поляризатора. Анализатор закреплен на вращающемся лимбе с делениями, нанесенными через четверть градуса. Лимб оснащен нониусами, позволяющими определять угловое положение анализатора с точностью $0,01^\circ$.

Электроды ячейки соединены через тумблер с вторичной обмоткой повышающего трансформатора, первичная обмотка которого подключена к выходным клеммам генератора переменного тока. Эффективное значение напряжения между электродами измеряется вольтметром. При частоте колебаний около 9 кГц, близкой к частоте резонанса трансформатора, напряжение на ячейке Керра может достигать 300 В. Выходные клеммы генератора соединены с осциллографом. Это позволяет наблюдать одновременно осциллограммы подаваемого на ячейку напряжения и оптического сигнала, пропорционального прошедшему через анализатор световому потоку.

Таким образом, в ячейку Керра направляется свет, распространяющийся перпендикулярно к статическому электрическому полю и поляризованный под углом 45° к этому полю. При приложении напряжения к обкладкам ячейки Керра между двумя лучами, поляризованными вертикально и горизонтально, появляется разность фаз δ , определяемая разностью показателей преломления между обыкновенным (n_o) и необыкновенным (n_e) лучами (в радианах):

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} l(n_e - n_o) = 2\pi B l E^2 \quad (23)$$

Из ячейки Керра выйдет свет, в общем случае поляризованный эллиптически. Величину разности фаз δ можно определить с помощью компенсатора и анализатора.

Действительно, если на двулучепреломляющий объект падает линейно поляризованная волна, направление колебаний которой составляет некоторый угол с оптической осью, то, как уже говорилось, в объекте возникают две волны. В нашем случае, когда поляризатор на входе ориентирован под 45° к направлению поля в образце, обе волны будут иметь одинаковые амплитуды. Направив ось x вдоль приложенного поля, можно записать

$$\begin{cases} E_x = A \sin \omega t \\ E_y = A \sin \omega t \end{cases}$$

При отсутствии дихроизма, равенство амплитуд будет наблюдаться в любой точке объекта, разность фаз будет меняться в зависимости от соотношения коэффициентов преломления. На выходе из объекта разность фаз примет значение

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l$$

Так что на выходе колебания удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} E_x = A \sin(\omega t - \delta) \\ E_y = A \sin \omega t \end{cases}$$

Совокупность таких колебаний дает эллиптическое колебание. Уравнение эллипса можно получить исключением параметра t из системы.

Такое исключение дает

$$\frac{x^2}{A^2 \sin^2 \delta} + \frac{y^2}{A^2 \sin^2 \delta} - \frac{2xy \cos \delta}{A^2 \sin^2 \delta} = 1 \quad (24)$$

Что и является уравнением эллипса в повернутых относительно полуосей координатах. Для вычисления эллиптичности перейдем в систему координат, оси которой параллельны полуосям эллипса (см. Рис. 2). Из симметрии уравнения эллипса (24) можно заключить, что полуоси эллипса повернуты на угол 45° относительно осей *изначальной* системы координат, поэтому новая система координат должна быть повернута на угол 45° относительно старой. Старые координаты выразятся через новые следующим образом:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') ; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \quad (25)$$

Подставляя эти формулы в уравнение эллипса (24), получим обычное уравнение эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (26)$$

Здесь величины a и b равны соответственно

$$a = \sqrt{\frac{A^2 \sin^2 \delta}{1 - \cos \delta}} ; \quad b = \sqrt{\frac{A^2 \sin^2 \delta}{1 + \cos \delta}} \quad (27)$$

Эллиптичность суммарного колебания, выражаемая соотношением полуосей, равна

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (28)$$

Таким образом, эллиптичность колебаний определяется искомой разностью фаз δ , определив эллиптичность, мы найдем и δ .

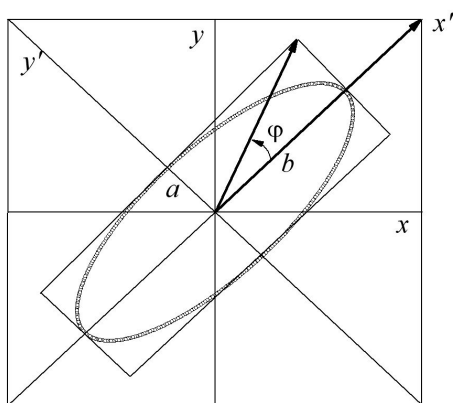


Рис.2

Определение эллиптичности может быть осуществлено с помощью четвертьволновой пластинки-компенсатора. Всякое эллиптическое колебание можно представить как два колебания с амплитудами a и b , сдвинутых по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$. Если при помощи четвертьволновой

пластинки ликвидировать эту разность фаз и сделать колебания синфазными, то их совокупность определит линейно поляризованное колебание, плоскость поляризации которого окажется повернутой на угол φ , определяемый эллиптичностью, очевидно, как

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (29)$$

Тогда

$$\varphi = \frac{\delta}{2}$$

Таким образом, угол, на который поворачивается плоскость поляризации волны при прохождении системы образец-компенсатор, равен половине набега фазы в двулучепреломляющем образце.

Тот же результат, а также зависимость интенсивности света на выходе системы от угла поворота анализатора можно получить более с использованием матриц Джонса (см. Приложение).

Ориентировав изначально (без поля в образце) анализатор так, чтобы затемнить поле наблюдения (скрещенное положение поляризатора и анализатора) и включив поле, можно увидеть, что свет через систему начал проходить. Вновь затемнить поле можно, если повернуть анализатор на искомый угол.

Затемнять поле наблюдения для поиска этого угла эффективнее, чем добиваться максимальной интенсивности (при изначально сонаправленных поляризаторе и анализаторе), поскольку момент затемнения можно улавливать с большей точностью, чем момент полного просветления.

Измерив вносимую образцом разность фаз δ и зная величину E , можно с использованием выражения (23) рассчитать постоянную Керра (B) для данной температуры и вещества.

В работе предлагается, изменяя частоту генератора, и фиксируя напряжение на образце по вольтметру, построить график зависимости δ от E^2 . Определяя наклон аппроксимирующей прямой по методу наименьших квадратов, рассчитать значение постоянной Керра.

Напряженность электрического поля связана с напряжением на обкладках конденсатора следующим образом:

$$E = \frac{U}{d}$$

Задание:

1. Отъюстировать поляриметр, установить нулевое положение анализатора (в отсутствие напряжения).
2. Определить разность фаз обыкновенного и необыкновенного лучей при изменении напряжения на образце (U).
3. Построить зависимость δ от E^2 , из наклона прямой определить постоянную Керра для данной жидкости.

Отчет должен содержать:

1. Оптическую схему поляриметра.
2. Формулы, необходимые для вычисления постоянной Керра.
3. Таблицу отсчетов положений анализатора при каждом значении напряжения.
4. График зависимости δ от E^2 , значение постоянной Керра с оценкой погрешности.

Литература:

1. П.Дебай, Г.Закк «Теория электрических свойств молекул» 1936
2. Дж.В.Бимс «Двойное лучепреломление в электрическом и магнитном полях», УФН, т. XIII, вып. 2, стр. 4

Приложение.

Матричное описание поляризационных эффектов. Матрицы Джонса.

Используемая в установке многокомпонентная оптическая система может быть описана с помощью матричного метода. При матричном описании состояние поляризации света описывается вектором, всякой оптической системе, изменяющей состояние поляризации, соответствует матрица. Если входящий в систему свет описывается вектором \vec{A} , а система – матрицей M , то выходящий из системы свет, описываемый вектором \vec{A}' , будет определяться

$$\vec{A}' = M\vec{A}$$

Удобство расчетов матричным методом определяется тем обстоятельством, что сложной системе, состоящей из компонент, каждый из которых описывается отдельной матрицей, соответствует общая матрица, являющаяся произведением отдельных.

$$\vec{A}' = M_n M_{n-1} \dots M_1 \vec{A}$$

Где отдельные элементы и соответствующие им матрицы нумеруются по ходу луча.

Часто пользуются матричным методом Джонса, в котором свет изображается двумерным вектором A , компоненты которого суть x и y компоненты электрического вектора E в выбранной декартовой системе координат, ось z которой направлена вдоль оси системы и направления распространения света.

$$A = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Временной множитель $e^{i\omega t}$ при расчетах может быть опущен, поэтому в качестве компонент вектора обычно используются комплексные амплитуды.

Матрицы элементов (матрицы Джонса) наиболее легко определяются в осях, соответствующих осям самого элемента. Поляризатор (анализатор), ось которого направлена вдоль оси x системы координат, описывается, очевидно, матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Двулучепреломляющий образец, вносящий разность фаз δ между обыкновенным и необыкновенным лучами, «быстрая» ось которого направлена вдоль x , а «медленная» вдоль y описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Частный случай такого образца – четвертьволновая пластинка:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку оси различных элементов повернуты друг относительно друга, при переходе от одного компонента к другому нужно выполнять поворот системы координат вокруг оси z , описываемый матрицей поворота

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Если в нашей оптической системе исходно ось x направлена вдоль поля в межэлектродном зазоре, то компоненты поля за поляризатором равны по величине и совпадают по фазе (поляризатор под углом 45 градусов к оси x). Следующие преобразования описываются как:

1. Появление набега фазы δ в образце $\begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Поворот осей на 45 градусов при переходе к компенсатору $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Появление набега фазы в $\frac{\pi}{2}$ в четвертьволновой пластинке $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Поворот осей на 90 градусов при переходе к скрещенному анализатору $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Поворот анализатора на угол φ относительно скрещенного положения $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
6. Действие анализатора в собственных осях $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Квадрат амплитуды результирующего поля E на выходе из анализатора дает зависимость интенсивности от угла φ поворота анализатора относительно скрещенного положения. Предлагаем читателю проделать описанные действия самостоятельно и убедиться, что интенсивность на выходе

$$I = I_0 \sin^2\left(\frac{\delta}{2} + \varphi\right)$$