

IX. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА: ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Современная дифракционная решетка обычно изготавливается путем нанесения алмазным резцом большого числа равноотстоящих штрихов на алюминиевом зеркале, полученном испарением алюминия на тщательно подготовленную стеклянную поверхность.

Распределение интенсивностей

Нетрудно показать Рис. 39, что разность хода между лучами, дифрагированными от соседних штрихов решетки, равна

$$\Delta = d(\sin \phi - \sin \psi), \quad (60)$$

где d — расстояние между штрихами (постоянная решетки); ψ — угол падения и ϕ — угол дифракции, отсчитанные от нормали к решетке. Интенсивность света будет максимальной в том направлении, для которого разность хода

$$\Delta = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (61)$$

где k — порядок спектра (лучи усиливают друг друга). Условие максимума запишется в виде:

$$k\lambda = d(\sin \phi - \sin \psi) \quad (62)$$

Максимумы, удовлетворяющие условию 60, называются главными максимумами. Из выражения 60 видно, что разные длины волн будут давать максимумы под одними и теми же углами, если выполняется условие

$$k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2 = d(\sin \phi - \sin \psi) \quad (63)$$

или же

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (64)$$

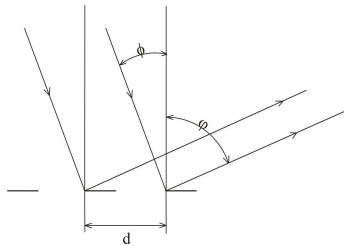


Рис. 39. Ход лучей при дифракции от отражательной решетки.

Из формулы 63 ясно, что если λ_1 равно, например, 8000\AA и мы ведем наблюдение в первом порядке, то под этим же углом будут наблюдаться максимум для 4000\AA во втором порядке и для 2667\AA в третьем порядке. Чем выше порядок спектра, в котором ведется наблюдение, тем ближе к исследуемой частоте накладываются из соседних порядков частоты и тем труднее избавиться от наложений простыми средствами (например, с помощью фильтров).

Из выражения 62 легко найти угловую дисперсию решетки:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \phi} \quad (65)$$

или

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\sin \phi - \sin \psi}{\lambda \cos \phi}. \quad (66)$$

Наблюдая спектр в направлении нормали к решетке, т.е. вблизи $\phi = 0$, мы можем положить $\cos \phi = 1$. тогда 65 переписывается так:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{k}{d}. \quad (67)$$

В этих условиях дисперсия решетки называется нормальной и не

Из выражения 62 можно найти также угловое увеличение решетки, т.е. отношение угловой ширины изображения щели к угловой ширине самой щели. Так как для одной спектральной линии k и λ остаются постоянными, то дифференцирование 62 по углам дает:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} = -\frac{\cos \psi}{\cos \phi}. \quad (68)$$

Здесь $\Delta\psi$ -угловая ширина щели, а $\Delta\phi$ - угловая ширина ее изображения. Знак минус означает, что при расширении щели в одну сторону изображение расширяется в другую.

Выражением 62 задаются положения главных максимумов. Чтобы получить более полную картину распределения интенсивностей в пучке, отраженном от решетки, нужно принять во внимание угловое распределение интенсивностей пучка, дифрагировавшего на одной из щелей решетки и вычислить результат интерференции всех таких пучков. Соответствующее вычисление приводит к выражению 69

$$J_0 = A^2 J J' = A^2 N^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v} \quad (69)$$

Здесь A — амплитуда световых колебаний; J учитывает интерференцию между пучками, отраженными от различных штрихов решетки Рис. 40; J' соответствует дифракции от одной щели Рис. 41; N — число штрихов решетки, a — ширина отражающего участка штриха. При нормальном падении

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \phi$$

$$v = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \phi.$$

Анализ этой функции показывает, что она имеет максимумы при $v = k_1\pi$ и $Nv = k_2\pi$. Это соответствует положению главных максимумов, величина которых пропорциональна квадрату числа штрихов решетки и убывает примерно обратно пропорционально квадрату порядка спектра. Наряду с этим, между двумя главными максимумами будет $N - 1$ минимумов, где значение интенсивности равно нулю. Более детальный анализ показывает, что между каждой парой минимумов лежит побочный максимум, интенсивность которого мала по сравнению с интенсивностью главных максимумов.

Разрешающая способность

Разрешающую способность решетки легко определить, зная угловую дисперсию решетки и угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом, которое из 69 определяется как $\frac{\lambda}{Nd}$. Простой подсчет приводит для рэлеевской разрешающей способности к выражению [3]

$$R = kN \quad (70)$$

Следует отметить, что практическая разрешающая способность хороших дифракционных решеток мало отличается от теоретической. Из выражения 70 видно, что для увеличения разрешающей способности решеток следует пользоваться спектрами высоких порядков (больше k). Однако, это связано с уменьшением интенсивности, которая падает при переходе к спектрам высоких порядков, а кроме того, с сокращением области, свободной от наложений. Поэтому обычные решетки редко применяются для работы со спектрами выше четвертого порядка. Чаще пользуются спектрами первого и второго порядка.

зависит от длины волны.

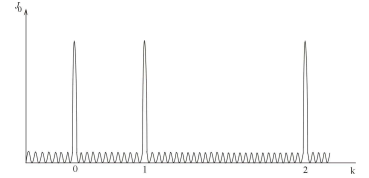


Рис. 40. Распределение интенсивности света при дифракции от многих щелей.

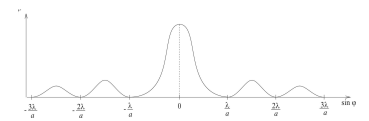


Рис. 41. Распределение интенсивности света при дифракции от одной щели.

Исследование дифракционной решетки

Для выполнения настоящей работы необходимо вспомнить теорию дифракционной решетки.

Литература:

1. Фриш С.Э., Техника спектроскопии, Л., 1936, гл.11 §§ 11–15.
2. Шишловский А.А., Прикладная физическая оптика, "Физматгиз", 1961, гл. 11 §3.
3. Физический практикум, под ред. проф. В.И. Ивероновой, М., 1962, стр. 657.
4. Эмиссионный спектральный анализ атомных материалов, под ред. проф. А.Н. Зайделя, М.-Л., 1960, стр.126.

Задание

1. Установить гониометр и решетку.
2. Определить постоянную решетки. В качестве известного спектра используется спектр ртути. Предлагается выбрать условия измерения, дающие минимальную погрешность при определении постоянной решетки.
3. Измерить угловую дисперсию решетки в разных порядках спектра и сравнить полученные значения с величинами, рассчитанными по формуле.
4. Для исследования разрешающей способности пользуются дополнительной диафрагмой, установленной между решеткой и натриевой лампой. Наблюдая желтый дублет натрия и закрывая эту диафрагму, необходимо получить слияние линий в разных порядках. Определив величину открытой штрихованной части, проверить формулу для разрешающей способности решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN,$$

где k — порядок спектра, N — число штрихов.

Требования, предъявляемые к отчету

Отчет должен содержать: оптическую схему установки, результаты измерений и вычисленные значения всех определяемых в работе величин с оценкой погрешности измерений.

Приложение. Разрешающая способность спектрального прибора

Распределение интенсивностей

Разрешающей способностью или разрешающей силой спектрального прибора называется его способность разделять две близко расположенные спектральные линии. Эту способность можно характеризовать величиной λ — наименьшей разностью длин волн двух линий, еще разделяемых прибором. В качестве численной характеристики разрешающей силы принимается безразмерная величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где λ — средняя длина волны двух разрешаемых линий.

Разрешающая способность могла бы быть сколь угодно велика при соблюдении следующих условий:

1. если линии строго монохроматичны;
2. в приборе отсутствует абберация и дифракция (это означает, что можно пользоваться законами геометрической оптики);
3. щель может быть сделана бесконечно узкой.

Однако, в реальных условиях ни одно из перечисленных условий не соблюдается, и в фокальной плоскости всякая спектральная линия является уширенным изображением щели с некоторым распределением освещенности внутри этого изображения.

При освещении входной щели монохроматическим светом распределение освещенности в плоскости изображения щели будет явлениями в самом приборе (шириной щели, дифракцией, абберациями и т.п.).

Для выяснения роли дифракции будем считать, что распределение освещенности в фокальной плоскости прибора будет определяться только дифракцией на диспергирующем элементе, и что действующая диафрагма прибора прямоугольна (она обычно задается размерами призмы или решетки).

Рассмотрим параллельный пучок лучей, проходящий сквозь щель шириной x_0 и бесконечно длинную в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа Рис. 42

Уравнение колебания, исходящего от элемента dx на расстоянии x от края щели может быть в комплексном виде записано:

$$dS = ae^{i(\omega t + \gamma \frac{x}{\lambda})} dx,$$

где $\gamma = 2\pi \sin \phi$. Суммарное колебание в фокальной плоскости линзы равно:

$$S = \int_0^{x_0} ae^{i(\omega t + \frac{\gamma x}{\lambda})} dx = \frac{a\lambda}{i\gamma} \left\{ e^{i(\omega t + \frac{\gamma x_0}{\lambda})} - e^{i\omega t} \right\}$$

или

$$S = \frac{a\lambda}{i\gamma} \left\{ e^{i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} e^{i\omega t}$$

Множитель

$$\xi = \frac{a\lambda}{i\gamma} \left\{ e^{i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\}$$

представляет собой комплексную амплитуду колебания S . Интенсивность колебания S (равная квадрату вещественной амплитуды):

$$J = \xi \xi^*,$$

где ξ^* — выражение, сопряженное с ξ . Таким образом

$$J = \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left\{ e^{i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} \left\{ e^{-i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} = 2 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} + e^{-i\frac{\gamma x_0}{\lambda}} \right) \right\}$$

или

$$J = 2 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left\{ 1 - \cos \left(\frac{\gamma x_0}{\lambda} \right) \right\} = 4 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\gamma x_0}{2\lambda} \right).$$

Подставляя вместо γ его значение $2\pi \sin \phi$, умножая и деля найденное выражение на x_0^2 , получим

$$J = (ax_0)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi x_0 \sin \phi}{\lambda} \right)}{\frac{\pi x_0 \sin \phi}{\lambda}} \right)^2. \quad (71)$$

Обозначая $ax_0 = A$ и $\frac{\pi x_0 \sin \phi}{\lambda}$ перепишем формулу 71 в виде

$$J = A^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}. \quad (72)$$

Выражение $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ имеет:

1. максимум $J_{max} = 1$ при $u = 0$
2. ряд эквидистантных минимумов $J_{min} = 0$ при $u = \pm k\pi$ где $k = 0, 1, 3, \dots$
3. вторичные максимумы при значениях u_k , являющимися корнями уравнения $u = \text{tg } u$.

Последнее уравнение получается из условия

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 0,$$

или

$$\left(\frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} \right) = \frac{\sin u}{u} \left(\text{ctg } u - \frac{1}{u} \right),$$

откуда либо $\frac{\sin u}{u} = 0$, что ведет к условию минимумов, либо $u = \text{tg } u$.

Корни последнего уравнения могут быть найдены графически как точки пересечения прямой $x = u$ с тангенсоидой $x = \text{tg } u$. Эти корни лежат между двумя соседними минимумами, располагаясь при возрастании все ближе и ближе к середине между ними. Два первых минимума получаются при $u = \pm 4,92 \frac{\pi}{2}$ и $u = \pm 2,86 \frac{\pi}{2}$ и имеют значения 0,0165 и 0,0472.

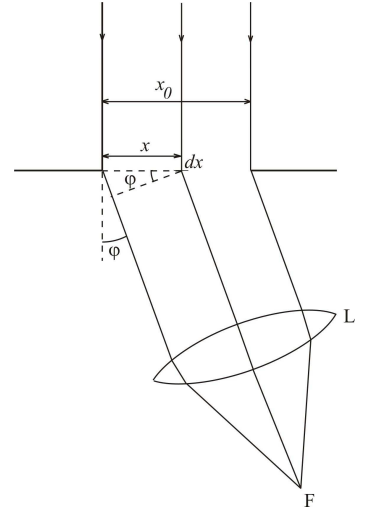


Рис. 42.

При больших k приближенно $u_k = \pm(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, где k — большие числа натурального ряда. Численное значение этих максимумов при больших k приблизительно равно $\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$.

Подставляя вместо u в 71 его значение $\frac{\pi x_0 \sin \phi}{\lambda}$, имеем:

1. главный максимум расположен при $\phi = 0$
2. минимумы расположены при ϕ , удовлетворяющих условию

$$\sin \phi = \pm k \frac{\lambda}{x_0},$$

или, при малых ϕ

$$\phi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}.$$

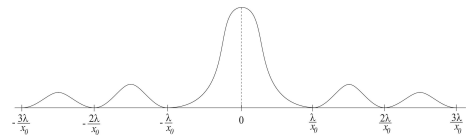


Рис. 43.

Графически распределение максимумов и минимумов представлено на Рис. 43.

По Рэлею, условие разрешения двух дифракционных картин заключается в том, чтобы главный максимум одной из них попадал на ближайший к главному максимуму минимум другой Рис. 44. В этом случае при равной интенсивности обоих главных максимумов ордината точки пересечения контура равна

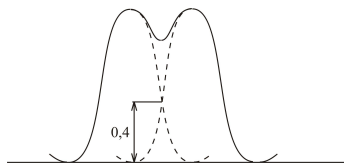


Рис. 44.

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \approx 0,4.$$

Следовательно, ордината провала между максимумами равна 0,8 от наибольшей ординаты. Отсюда, по Рэлею, два луча разрешены только в том случае, если угол между ними

$$\delta D \geq \frac{\lambda}{x_0}, \quad (73)$$

где λ — средняя длина волны рассматриваемых лучей, x_0 — поперечное сечение пучка света, прошедшего диафрагму.

Пользуясь соотношением Рэлея, получим выражение для разрешающей способности

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = x_0 \frac{\delta D}{\delta\lambda}, \quad (74)$$

где x_0 — ширина действующего отверстия прибора, δD — угловое расстояние между разрешенными спектральными линиями.

Вычисление разрешающей способности по Рэлею может быть легко произведено в случае призмы, дифракционной решетки, эшелона Майкельсона.

Однако, в том случае, когда функция распределения освещенности не является кривой представленного на Рис. 45 типа, также удобно в качестве меры разрешения выбрать интервал, на котором две линии равной интенсивности дают такую суммарную кривую освещенности, что глубина провала между максимумами будет равна 0,2 от ординаты максимума.

Следует, однако, иметь в виду, что если две линии удовлетворяют условию Рэлея, то это еще не означает, что они будут реально разрешены прибором. в том случае, когда интенсивности двух таких линий сильно отличаются друг от друга, они могут сливаться в одну даже тогда, когда расстояние между ними больше $\delta\lambda$.

В некоторых случаях линии, находящиеся на расстоянии, меньшем $\delta\lambda$, могут оказаться разрешенными. Для этого нужно только, чтобы точность измерения интенсивностей превышала 20%. Например, при фотографических методах исследования, эта точность может быть доведена до 1%; следовательно, минимум, глубина которого превышает 1%, может быть обнаружен, и две линии, интенсивности которых равны, могут быть разрешены, если расстояние между их максимумами значительно меньше определенной по Рэлею величины.

Существенно знать, когда вычисление разрешающей силы по Рэлею может дать правильную оценку реальной разрешающей способности прибора. Для этого необходимо сделать оценку тех допущений, при которых делаются вычисления.

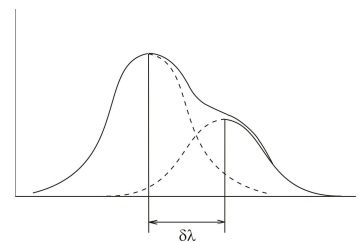


Рис. 45. Кривые освещенности в фокальной плоскости прибора.

Разрешающая способность призмы

Определим величину x_0 Рис. 46 в том случае, когда она задается размерами призмы:

$$x_0 = ab\sqrt{1 - \sin^2 i}$$

Для минимума отклонения

$$\sin i = \mu \sin\left(\frac{A}{2}\right),$$

где μ — показатель преломления, т.е.

$$x_0 = AB\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

Выразим AB через величину основания призмы $BC = t$

$$AB = \frac{BF}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{t}{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)};$$

$$x_0 = \frac{t\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}}{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (75)$$

и сравним это с условием минимума отклонения

$$\frac{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}} = \frac{\delta D}{\delta \mu},$$

т.е.

$$x_0 = t \frac{\delta \mu}{\delta D_{min}}$$

или просто

$$x_0 = t \frac{\delta \mu}{\delta D} \quad (76)$$

тогда

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = x_0 \frac{\delta D}{\delta \lambda} = t \frac{\delta \mu}{\delta D} \frac{\delta D}{\delta \lambda}$$

Таким образом, разрешающая способность призмы

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = t \frac{\delta \mu}{\delta \lambda}. \quad (77)$$

Величина $\frac{d\mu}{d\lambda}$ представляет собой дисперсию вещества, из которого сделана призма.

Для того, чтобы две линии, для которых μ различается на $d\mu$ могли быть разрешены, основание призмы должно равняться:

$$t = \frac{\lambda}{d\mu}$$

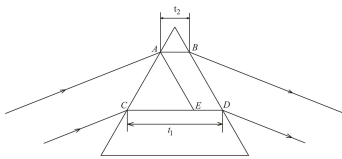


Рис. 47.

Разрешающая способность призмы из данного материала зависит только от размеров основания, но не от преломляющего угла (в то время как дисперсия зависит от преломляющего угла). Все призмы построенные на одном и том же основании и из одинакового материала, имеют одинаковую разрешающую силу.

При данной дисперсии $\frac{d\mu}{d\lambda}$, разрешающая сила по формуле 72 тем больше, чем больше сечение (апертура) пучка света, падающего на призму. Если пучок заполняет не всю призму, но проходит так, что пути крайних лучей в призме равны t_1 и t_2 , то это равносильно тому, как если бы пучок проходил призму ACE с основанием $CE = t_1 - t_2$ и плоскопараллельную пластинку ABDE (см. Рис. 47).

В этом случае разрешающая способность равна

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = (t_1 - t_2) \frac{d\mu}{d\lambda} \quad (78)$$

Реальная разрешающая способность спектрального прибора

Все полученные выше формулы были выведены в предположении, что на призму падает строго параллельный пучок света, т.е. для бесконечно узкой щели и идеальных объективов. При конечной ширине щели разрешающая способность будет падать.

Попытаемся сопоставить ширину щели с шириной дифракционной картины, зависящей от действующего отверстия прибора. За меру этой последней примем половину расстояния между первыми дифракционными минимумами. Тогда угловая ширина спектральной линии будет определяться величиной

$$\phi = \frac{\lambda}{x_0}.$$

Если предположить, что спектр расположен перпендикулярно оптической оси камеры, то линейная ширина спектральной линии будет равна

$$S = f_2 \phi = \frac{\lambda}{x_0} f_2,$$

где f_2 — фокусное расстояние объектива камеры.

Пусть a — ширина щели спектрального прибора, тогда ширина геометрического изображения щели будет

$$a' = a \frac{f_2}{f_1},$$

где f_1 — фокусное расстояние объектива коллиматора. Естественно, что эта ширина геометрического изображения будет увеличивать общую ширину спектральной линии. Чтобы такое увеличение существенным образом не искажало распределения интенсивности в дифракционной картине, необходимо, чтобы $a' \leq S$.

При $a' = S$ имеем:

$$\frac{\lambda}{x_0} f_2 = \frac{f_2}{f_1} a,$$

откуда

$$a = f_1 \frac{\lambda}{x_0} \equiv a_H.$$

Такую ширину щели принято называть нормальной. Иначе это равенство можно переписать так:

$$a_H = \frac{\lambda}{\psi},$$

где $\psi = \frac{x_0}{f_1}$ есть угол, под которым из щели видно действующее отверстие спектрального прибора.

Таким образом, если мы возьмем нормальную ширину щели, то ее изображение будет соответствовать ширине дифракционной картины спектральной линии. Однако, такая ширина будет несколько снижать разрешающую способность прибора приблизительно на 20%. Для полного выявления разрешающей способности следует брать еще более узкие щели, что приведет к сильному снижению интенсивности. Поэтому обычно принимается, что для проверки разрешающей способности достаточно брать нормальную ширину щели.

Как влияет ширина щели на разрешающую способность видно из графика, изображенного на Рис. 48 (кривая R). Здесь по оси абсцисс отложена ширина щели в единицах нормальной ширины, а по оси ординат — величина разрешающей способности, которая при щели $a = 0$ принята за 1,00. Мы видим, что при нормальной ширине щели ($\frac{a}{a_H} = 1,0$) разрешающая способность составляет примерно 77% от максимального значения.

На этом же графике приведена зависимость интенсивности спектральной линии от ширины щели, откуда видно, что яркость линейчатого спектра не зависит от ширины щели, пока щель больше нормальной, и начинает падать с уменьшением ширины щели, когда она одного порядка или меньше нормальной. В случае сплошного спектра дело обстоит иначе: там яркость прямо пропорциональна ширине щели и обратно пропорциональна дисперсии [4].

Рэлеевская, или теоретическая разрешающая сила является верхним пределом разрешения спектрального прибора. Практическую разрешающую способность можно оценить из следующих соображений: лучшие отечественные фотоэмульсии, применяемые в спектральном анализе, обладают разрешающей способностью 80 штрихов на миллиметр. Если мы даже завьсим это число на 25%, то и в этом случае можно разрешить линии, находящиеся на расстоянии на менее 10^{-3} см.

Даже хорошие щели трудно применять при ширине, меньшей 0,001 см. Таким образом, линейная разрешающая способность, определяемая фотоэмульсией и качеством щелей, примерно одинакова; приборы с фотографической, равно как и с фотоэлектрической регистрацией не могут разрешить две линии, отстоящие друг от друга на расстоянии, меньшем 0,01 мм., по спектру. Отсюда легко получить выражение для минимального разрешаемого интервала длин волн $\Delta\lambda_{\text{пр}}$:

$$\Delta\lambda_{\text{пр}} \approx 10^{-3} \frac{d\lambda}{dl},$$

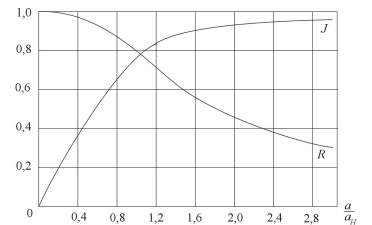


Рис. 48. Зависимость интенсивности J и разрешающей способности R от ширины щели спектрографа

а практическая разрешающая сила $R_{\text{пр}}$ определится как

$$R_{\text{пр}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{пр}}} = 10^3 \lambda \frac{dl}{d\lambda}$$

(здесь l выражено в см.)

Сравнение величины $R_{\text{пр}}$ и $R_{\text{теор}}$ позволяет установить, какая из величин является определяющей.

Для короткофокусных призмных приборов, как правило, практическая разрешающая сила много меньше теоретической (например, у ИСП-51). У длиннофокусных приборов, а также у больших дифракционных спектрографов, разрешающая сила близка к теоретической.

Литература

1. Прокофьев В.К., Фотографические методы количественного спектрального анализа металлов и сплавов, М.-Л., 1951, ч. 1, §10.
2. Топорец А.С., Монохроматоры, М., 1955, §§18, 22,23.
3. Фриш С.Э., Техника спектроскопии, Л., 1936, гл. 1, §§5 и 6.
4. Сойер Р., Экспериментальная спектроскопия, ИЛ, 1953.
5. Дичберн Р., Физическая оптика, М., Наука, 1965, гл. 8.